

Quadrisection give new lower bounds
for the rope length of a knot

ELIZABETH DENNE

YUANAN DIAO

JOHN M SULLIVAN

U s in g th e e x is t en c e o f a s p e ci a
n o n r i v i a l k n o tis a t l e as t 15 . 6
o f 1 2 . N um e ri c a l e x p e r m e n
s o o u r n e w b
5 7 M 2 5 ;

1 I n t r
T h e r o p e l e n g t h p r o b
m a i n t a i n i n g a n e m b e
m o d e l o f t y i n g t h

M o r e t e c h $FS - n K$ slash-period cf a .notdef l s l p y K i t - s c h
u d e .notdef .notdef - t n h .notdef i d c

a d d 1 .notdef one - t c .notdef kb s .notdef t w i c t - r

a ; b ; c - .notdef / i f n c .notdef im ca l rt

i s t i n c K - t p I i - t n i t s k f n n f r .notdef m t h .notdef w 4

t h FSK - aslash-period t D 0 n K i s - C - s^{1;1} m a n i n t a i t .notdef t

a n .notdef n

u n c t i .notdef n .notdef ar K - c i s - C¹ w .c W - a h

.notdef - n n - d n .notdef n .notdef r m a - K .notdef a

t h .notdef n FSK - islash-period n s d t .notdef h .notdef e d p

r e .notdef d i .notdef m e t er o f

t e h .notdef t n t h e e x i s t i n .notdef li t e r .notdef t

t h a n d i a m e

W e d e fi n e r o p e l e n g t h t

o b e

B e c a u s e t h i s i C - s⁰ s p e .notdef m .notdef g i y - .notdef c n

o - c n .notdef - .notdef d

h a r d [4] bracket right - t t o h a - s ht oawn y (t a

m e) k n o

C a n t a r e l l a , K u s n e r a

n d S u

t h e s e a r e s h a r p i n c e r

t a i n [4]^{period-s} H o w e v e r , t h e s e

e x a m p l e s a

b y C a n t a r e l l a , [2] due , s K - c u - r is b - n ee sr comma - a

P u b l i s h e D - a r O y I colon - two 0100 six - period

t i g h t (r o p e l e B - n₀ g f t - t h
 .notdef hyphen - B.notdef - c r r r i .notdef t - m i a c n a r l parenright - n
 .notdef m .notdef w h a t d iff .notdef r .notdef n t G .notdef h
 r i n g n .notdef B - i₀ hn .notdef u .notdef - f td h .notdef tcik a
 n d pr .notdef .notdef ma b y m inimi .notdef i ng , .notdef r
 t .notdef dic .notdef m p .notdef n B_{zero-n} it .notdef .notdef .notdef ft
 i .notdef p an a r , a nd i t .notdef .notdef m .notdef .notdef i
 g
 e x p l i c it l y
 N u m e r i c a ln s [1 x - k - bracketright, 7i - p Se u
 bracketleft - r1 l]l - a - nine m n e - v - d a - nR - bracketleft^{1t} n a]s - s - eight
 wub d gy o t h e m i n i m u m r o p e l
 one - e : 3n - six 7 g a - two n h d f t o a n .notdef t h
 .notdef r t i g h t t r .notdef f .notdef i l 1 : 7
 8 iFt .notdef hr dc i n .notdef m .notdef r i c a l s
 i m .notdef l a t i .notdef n s f 2 t 1h - .notdef b s
 t l .notdef w 4 ra 1b_{s-colon} 70 2 t n - six hd ii sn w a s
 eight - i mw hp r - .notdef s vh a n y k n o t h a
 one - s (r - two mo e p ae nl i - e n - n g g t - t h - h am to
 o f o n e
 H e r e , w e u s e t h e i d e a o
 f q u a t o g e t b e t t e r l o w e
 r b o u [one - n]six - s d h - s o
 u s i n g p o l y g o n a l k n o t s
 , t h a h a v e a qu a d - bracketleft¹]e - three ixs
 tee cn ad net d . tK h ui ps er g e n e r i c
 k n o t s h a v e e s s e n t i a r t
 i c e b bracketleft - y₁].M - five) oW r e - t o w n i l a ln
 dd eM f i o n n e d q u a d r i s e c a n t s
 a r e e x a c t l y t h a t a c u r v
 e a r b i t r a r i EM - l y c .notdef c 1
 n o n e s s e n
 B y c o m p a r i n g t h e o r d e r d e s i g n e d
 r i n g w e d i s i n g u i s h t h r
 e e t y p e s a r g u m e n t s t o o
 b t a i n a l o w e o f t h a t t y p
 e . T h 1 colon - e93 three - period
 I n h e r d o c - bracketleft₅], oD r e a n l n d e i s s h s o e w r t - s at t hi
 q u a d r i s e c a n t s o f a l t T
 eh re no , a r - s te t ha t a n y n o n t r
 1 colon - v65.
 N o n t i v i a l l i n k s a l s o
 n e c e b o u n d s o b t a i n e d
 f o l i n k s i n t e r p r e t a t i
 o n o f t h e a r four - gEM, u i n t h e G
 e h r i n g l i n k p r o b l e r o p
 e l e n g t h
 G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

2 Definitions and lemmas

Definition A k n i os ta n o r i e n K i e H11938 $-n^3$ s-A n i y m w p-.notdef l-a-p a n-b d n a K d ni .notdef i-t d i t i n t .notdef CR-t a a n CRd-c-b H .notdef m CR a p i .notdef th .notdef ar a t b-.notdef .notdef .notdef m l l .notdef w i n g t h .notdef -K g p two-fv-CR a n-w .notdef .notdef m .notdef t i m .notdef CR a r D p b-CRt-a b .notdef m p h a i .notdef .notdef t .notdef .notdef r d K r .notdef b p i `i-a l t o d e n o CR-t a semicolon-e b b-t y-h e c l j a e b n-jd-p g a-e t n h i o ost o-f e n-s t-a t b-o

i n s p a c e , t h a e-period
D e fi A-n i-nnotdef t-s .notdef -i c-o n-a .notdef n-r t K ik s-i n na .notdef .notdef n-t .notdef r H11938 3 .notdef .notdef .notdef -n .notdef t i i K-h h a s n c .notdef -t m-l .notdef p a .notdef n-s nts .notdef .notdef n ic ts a-s a period-n n A-nnotdef .notdef ntr d p l r .notdef .notdef -K n t w .notdef f hi c h l i K nw ah i c m-h lm i a n n s .notdef c a n t l s i .notdef nc t .notdef ar .n-i W a s-t n-q-w-.notdef c-i d l-a-a l n-d t r-t .notdef -s i .notdef m 2 .notdef s a-c .notdef a 3 s .notdef c four-a sn .notdef t c a a n n dt , r-m .notdef i sd p s .notdef c^{g-a} tmqi .notdef v a-n-a-.notdef s l b-d i y-r c si

s e g b m-period
T h e o r i e n t a t o n o f a t r i s e c t h e t h r e e - r i p c-T h r .notdef .notdef u c p u .notdef d .notdef x i c .notdef r a p i c a a .notdef a y c n-a- .notdef .notdef c-d_a, b b .notdef .notdef -m-t .notdef n .notdef c (h d .notdef i-.notdef s-a r r .notdef v t rr s-i s d .notdef c a n F-t s i g .r u C .notdef r s-h e a-p 1 n c g t i n v g .notdef l t y k n o t o r t h e t r i s a e b-i_c s-c a d n i-t r c e h b-c2CR-n a i-period ba c ba

g r .notdef 1 .notdef ah a-.notdef c r-s .notdef .notdef tr r .notdef vi .notdef sr .notdef sc .notdef ad n (tl s .notdef h c y c l i c .notdef K d-i a s r a .notdef -b n-a t-b-d r-h-c .notdef s p p .notdef .notdef i c n t h e o r i e n t a t i o n o f t h

S i m i l a r l y , t h e a f b o c-c_u d r-c .notdef p r o i n-n t t s h o a f t c a n t l i n , b t m a K-y .notdef O c f c .notdef .notdef r r i s n .notdef K-a i s .notdef n l y a c y c l i c .notdef r d-K .notdef -i r , i a s n-r .notdef -d a i r d .notdef r , m .notdef a n i n g .notdef n .notdef .notdef f D-t₄ i-h S-.notdef₄ p h i c r .notdef .notdef .notdef

x i c .notdef g r a p hi c a .notdef .notdef y .notdef a .notdef t
.notdef.notdef.notdef m .notdef n a - t i b n ac a - b
G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

a a d c b .notdef d i l l c a l l t h .notdef c .notdef s r - i .notdef m
 sipp alp
 a l t r - r .notdef - n sa p - t i - .notdef F cn i gt g_{period-i} u N r l - o e y t
 2 e a t s - h i - a n - t t h i s
 o K - f, a n d s w i t c h i n g t h e o
 r i e
 a b c d a b c d a b c d
 F i g r 2 H .notdef r .notdef a - w .notdef b sc n .notdef - d .notdef q - a .notdef ca hd .notdef f - r it s - h
 t o r i g h t , t h e s e a r e s i m p l e
 o f t h e K i o a - s i n - b , a - c t s - d - b a d a a c - l d o - c , b - n r d g e s
 W h e n d i s c u a s b - s c - i w n - .notdef d g i a l q l u a - K s d
 .notdef .notdef r a t - b - il - twos - CR a e a y t - c_h
 .notdef a n th c y c .notdef i c .notdef K d .notdef i r l a
 f - l p - b b a - .notdef c i b d t a - r c a - c .notdef - b d n d .notdef - g
 p .notdef
 t h e t y p e o
 Ib eⁿ e s on mc e_a l sleend s N^e, S a_N S^l t_{NUL}^e c q d - a u r
 b - NUL - n_aⁿ a_{d_{a-a}} s_r^t i t h - s e - .notdef

S .notdef .notdef t h n d s b .notdef cftt h h .notdef a - .notdef
 n b - m i h - i s d - d a n s n .notdef g - a l m t .notdef .notdef n
 t - K i s i t s t h .notdef s .notdef .notdef n d s
 a l t a c - r b - n I a - d t tw al
 C a n t a r e l l a , K [3 u] t ph ea rt
 b teh re g m , iK du q u a d r K i s s e a c .notdef
 a t n - .notdef m t s a - f .notdef o - t - c i - r cn K - a_d l h - D l
 .notdef y - l_n l n 5 n t t - s n .notdef n t r i v i a l
 k n .notdef t s h a v a l t .notdef r 1 h a v
 .notdef s h .notdef w n t h a t t h .notdef n 2
 c t a .notdef n - hyphen tb y p
 c o u n t i n g a l t e r n a t i n
 3 K n o t s w
 B e c a u s e t h e r o p e l e n
 a n K - y t .notdef k h n a v o t t h 1 .notdef - c h - k
 in s si K i - m (p - C^{1;1} c i l - u^r - .notdef .notdef s a c u r v a t
 u r 2_{e-period}
 F o r a a two - nH11938³ y .notdef B o - a / i e n o t t e t
 h e o p e n a n O i .notdef t r b .notdef r - l a b o
 u t t h e l o c a l s t r u c t [u - eight,
 rLee bracketright - o
 a n - bracketleft 4, d L e] . m
 L e m m - L e - K - a b t - three .notdef a 1 k n .notdef t a 2
 Kn i - t B - h - t. a .notdef - slash n h - o n i t c .notdef k n n k n
 o t K d t .notdef h i c s f a r c EM h n a - d i s s l t r
 n .notdef n g s v - t e h r a - s
 G e o m T - e_o t p r_{o-comma} yl V ampersand - o - o g l y u

c e n t a e $I - r - a$ i - e b s d a a t s K ci j a - a - t NULb - h - n j
 less - t1 f - t h .notdef n t h .notdef ab
 i n t K r - i s .notdef a c t - si - s n g l .notdef CR.notdef - a
 n r CR - k b a wh .notdef.notdef t .notdef t .notdef.notdef n d g a - t h
 a r j a - cNULs - b j .
 P r Io f - o f - t h e r K - e t a - w e n r g e n a c n - t a a t r n s
 .notdef.notdef.notdef - o mf f .notdef t ph a
 i t B .h - a / i t n e t .a ; c_{p-semicolon} c / eo su n d .notdef
 h .notdef v e r $\frac{1}{2}$ F i .notdef r th l .notdef e
 t a t .notdef m K h t a i d f a t h i r c d i it nh
 t t h r .notdef s s .notdef a - c p t - b hti
 w e w o r period - u a ; b ; c / d $\frac{1}{less - two} h - period$ T - a vh e e l e n g t
 h b o line - line
 A n i m m e d
 C o r o I - l l - f - K h a a r s y .notdef3 n .a - i, b - two 2K - t
 ah p - n2d - CR - c a k i n a ; b s two - B.s - p / h
 t h e c o m CR - p b l - l_a e e m s B - e.o - pn - slash.
 T h e f o l l o w i n g g e n e r a l e e m
 m am m - n a , d - a_{sLeh} m_{o-commma} u m l a - u w e g i v e
 a s l i g h t l
 L e m m - L e - K - ab - t₃.notdef. a 3 k n t f a 2n - K it th t - .notdef hn
 t - i ch k .notdef
 X a g - f .notdef e u @i - B. a / s 1 p L .notdef i r p e s c h i t .notdef , t h
 P r C - o oo n - f s i d e r w h a t t h i s p - b2 K L

d D a j b j n d DC2 et h e b b - n .notdef t w - K a - .notdef
 t n n d t a - h b .notdef s h .notdef g pm s t r .notdef t c
 h - one = d ns .notdef b a - b b - y .notdef a t f d a .notdef c s - t .notdef
 nr t s .notdef.notdef t h t K - .notdef .notdef h s t h
 .notdef l .notdef c K l - i .s - s L i - DC2 i^{d - n - slash} p = Ns w - c h - c
 i n t .notdef - s t h r a a - .notdef.notdef n g dh t a - K a n - b t g
 l - .notdef na tn t g F .notdef i .notdef g parenright - m us r h
 e r o y 3 w (s i r D d = 2s - period i - DC2 n - slash_b u i t i s
 .notdef l i m i t o f K i r s c l b s y
 p .notdef i n t c h a r a r i c s t .notdef a $\frac{1}{two - r}$ t t - i l .notdef a .notdef a
 t a t sit th n L .notdef i f 1 equal - t2 c
 i s a 1. line - line
 C o r o l - S lu ap r - Kp - h_y a - o3 s s . e 4 n i t p ; t - a; b
 2i - K c i p - t n two - CR - h a .notdef s - L .notdef † a p b b .notdef
 t h .notdef a n g l a b p a t n - b d p .notdef - n h
 t_a.notdef n_b.notdef a v - dagger^b p c p a r t a i ic b - u al
 a re , v i f - K_{comma - r} t - s `e - h - a NAK_b EM.
 P r B - o L_{y - o} ef m `m - a i a .notdef three - a t ..notdef.notdef3
 a .notdef t h .notdef.notdef n t h f B - t. p / p w r h i s a t
 l e a s t † a - t p b e e - b s - t p w he ee n i i c t a s l a
 ed w - n i h a † a - v p e D b - EM, a p n CR - two a de x a c
 t l y w h e line - line

O b s e r v e a h b i a c n - t d c a l q .notdef u d a a - d r b a i
c - .notdef b r - a d - ea - t c d n - b_a^i_{c-d}
S i m p l .notdef , notdef i p p .notdef d a n
d a l t .notdef r n a c a n t s . C W .notdef
o c r a o t n o l a a p h - r p e y l s y e four - t r i s
e c a r o p e l e n g t h f o
g e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

a r DC2^{d_{DC2}} r b DC2 K

F i g _ r _ 3 .notdef L I e n m t ,m - h t .notdef a h p 3 e period - r c 3 i K - r a c b a - l e n t d a
 $r_g ab2b - lK_{e-e}^{g-h} a - th - aKa^s e r_{a NUL}^D a-d = two - d_{period-s}$ i i - DC2.notdefn - slash - s h e r - d e D a NUL b j n DC2 -
T h e o T - r e h e - m r - three period - o p 5 e l e
n g t h o f a k n o c a n t
i - EM, two - sEMA - o 3EM, I re e a s s
P r o - R oe f K c - t .notdef a h l a - e v .notdef .notdef n i
t t h i c k n .notdef s `period-s` a b bc .notdef d t h
.notdef q a d K - r ii ns t - .notdef c ha .notdef n .notdef s - t
b a - twoCR a l n wd c a .notdef .notdef .notdef a .notdef i m p
.notdef q u a d d r i .notdef a - s c r a n t - v; NAK_t hds NAK_a EM - r
d s C n .notdef o r o . lI l na r h y e 3 . a 4 s e
o f a c - fl a p b - n p a r .notdef r .notdef NAK_c r
a - C_b .notdef fd_d2EM. s I .notdef t h c .notdef e o f .notdef
n l t r i a - s comma - b - e b c - c aa d n - d - n d as a - r e
r `vNAK_a e c - Cr_b C `d - e d_a 3EM - comma. line - line
O f c o u r s e , a n y c l EM o i s n e - d
e d c n u d e - r v
n o t t e d or h s .notdef n y q u d r i c
two - nEM. s B ubte
r i C¹ c l .notdef o C - .notdef - s¹ e n i s n t h o e a r o u n d c i c l e
q u a d r i s e c a n t s , s o o a t l
A l t h o u g h K u p e r b e r g h
a s s h a n d D e n n e s h o w s t h
a t i n f a T h e o a r r e e m n 3 o . t 5 a
s g o o d a s - bracketleft8]t - o h - r bracketleft - e - e4]. p i
m p r o v e S o - e u - cw^{t - r} ei b owo niu n - five ld cs o ,
nis n i d e r q u a d
G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y u

4 Length bounds in terms of segment lengths

e $K - n$ i a t h t q h a i ab c - c - d w r k d c s k a n - n c a - b O .notdef n t - .notdef t h .notdef d i s t a n c s a l n g t h .notdef q .notdef .notdef i l l a b b r .notdef v i r a - W t a - D .notdef b - j j t s W h .notdef - b - D s c j n t W h D - c N U L j - .notdef - d j W e s t a r t w i t r h - c o m m a s as t - n f d m - o r - e l q ou w a d - e r b - i L e m m - I a a - f b four - i s d a - one notdef i p p .notdef d q a d r i s .notdef m i d s .notdef g m s N A K .notdef 1 n t F .notdef h r a t sh r l N A K one - r - .notdef t n m h g .notdef .notdef n - r h - .notdef t i h C R c a i o u t - B .s - b /; is die m t i N A K 1 t - l a - h C R b e - r l d n - l y e is B - f .o - c / P r O - o r - o f - i e n t t h e k s D n o - b N U L t - c j < 1 n t h .notdef - L e n e u - m - b e i t c h < e two - E M = r b d < c two - E M = B .notdef t c s a i a n - b n d a - c d r .notdef r .notdef .notdef r .notdef h ^{a - c} v a .notdef - E M n b N A K d E M . T h i s i s .notdef c o ^{c} r a D ^{c} i C - a - c t a n ^{b} d _d D ^{b} C ^{d} T h .notdef .notdef c .notdef n d .notdef t a t .notdef .notdef n t f .notdef C .notdef .notdef o - w .notdef r o .

line - line

L e m m - I a a - f b four - i c period - s d 2 a n a l t .notdef r n a t i n g q .notdef r N A K 1 a n - t N A K d 1 W i t h t h .notdef s .notdef a l C R .notdef - d r a i - u .notdef .notdef n i .notdef t .notdef B .b / [B .c / .s - I N A K 1 a s w C R a l c l , e t s h - B .b - o / a u n t - C R - n b d l d i d e e - s B .o - c /.

P r I - o r ^{o}_D a - f j b j < 1 t h L .notdef n e m - b y - e m ia t a 3 < e two - E M - one = r b d < a two - E M S i m t D l c j d r - j < 1 y t , h i .notdef n c b < i E M - two - t = r d .notdef less - r c two - E M = B p r .notdef T f h .notdef e f o , r w e m a h 3 c E M - a .v n - five è b N A K d E M c o n t r .notdef i c t h e i n e q u .notdef l i t r ; t N A K 1 B e .notdef .c - a a h u - .notdef - d - n a d - s .notdef - w - r .notdef h B - .notdef b t - slash a B .c - d /, t h e r e m a i n C n o g r s o . three - line - line - e

A s s u g g e s t e d b y t h e d i s c u s s e d a s s e m b l y a r c o f a k n e x a c t l y t h e m i n i m u m l e n g t h s c u s w h e r e w e h a v e a n a r c o f a k n e x a c t l y t h e m i n i m u m l e n g t h s c u s w h e r e w e h a v e a n a

D e fi F - n i - o - r N A K o n e - r i l o - f .notdef r / n - W t N U L - l i n e _ 2 1 C a r .^{\text{one}-c} = r s - s l a s h . i F r_{n-\text{semicolon}} s N A K_r 1 a D C 2 - n 2 d - O E 0 ; E M t h e m i n i m u m l

$2 - W$ slash - D - parenleft fr / C f s / C . D C 2 E M i D C 2 N A K a r .^{\text{c}-\text{one}} = r c - s l a s h C a - o r - s .^{\text{c}-\text{one}} = s c - s l a s h h e f u f r s l a s h - c t i l o l .notdef i s e .notdef i n n o t m e a s - s i d e x a c t l y t o m a G e o m T - e_o t p r , y l V o - o - a m p e r s a n d g l y - u

$$a \ a_r^0 \ ogonek \ \overset{p}{\underset{b^0}{\wedge}} \ s \ b$$

Figure 4 : If points a ; b $a - r$ e at distances r ; s $NAK1$ (respectively) from p , then

$h \ e \ s \ h \ o \ r \ a \ t - t \ .notdef - e - b \ a \ s \ v \ t \ .notdef \ B \ d - p - u / i \ r \ s \ n \ v \ p \ l - e - g \ .notdef \ f \ n \ r - .notdef \ o \ .m \ E \ i \ t \ e \ .notdef \ m \ n \ t \ r \ (i \ n \ t \ e \ c \ .notdef \ e \ i \ l \ a \ t - l_B \ .p / . \ I \ .notdef \ n \ t \ i \ d \ t \ i \ t \ s \ l \ m - e \ .r ; s - n ; \dagger \ g - a \ t \ s l a s h - p \ .$

$L \ e \ m \ Aa \ n \ 4 \ CR \ f - a_{3r}o - a \ t \ c \ b \ s \ t \ a \ y \ B - i \ .p \ s l a s h - n \ g - h \ .notdef \ .notdef \ s \ t \ s \ n \ i \ m \ .j \ a \ N U L \ p \ j ; j \ b \ N U L \ p \ j ; \dagger \ a \ y \ p - s l a s h \ .$

$P \ r \ L - o \ e - r - o \ W \ f t \ D - a N U L \ j - p \ j \ n \ s \ W \ D - b N U L \ j - p \ j \ .notdef \ e \ d \ i \ p - s \ t \ w \ a \ r \ ; t - c - s N A K_e h - o n e \ s \ t \ a \ l \ D C 2 \ W \ t \ D \ a \ \dagger \ b \ b \ .notdef \ t \ h \ .notdef \ a \ n - a N U L \ p - g \ a l \ n - b - .notdef \ N U L \ p - b - d \ .notdef \ .notdef \ t \ h \ w \ .notdef \ .notdef \ .notdef \ s \ n \ h \ .notdef \ r \ a \ t - t \ .$

$b \ s \ t \ a \ y \ i \ B \ n - W \ g - B - D \ .p \ s l a s h - .notdef \ .notdef \ i \ t \ t \ s \ e \ i \ r \ d \ i \ s \ t \ h \ e \ s \ t \ r \ C^1 \ j \ .notdef \ .notdef \ i \ t \ n \ t \ r \ a \ i \ g \ .notdef \ .notdef \ a \ t \ .notdef \ a \ t - .notdef_{B-n} \ a \ r \ g \ m \ r \ .notdef \ a \ @ \ B \ a - c \ i - n \ r \ d \ c \ a \ l \ s \ .notdef \ t \ a \ r \ @ \ B \ t \ b - .notdef \ I \ n \ .notdef \ i \ t \ h \ .notdef \ r \ c \ a \ s \ .notdef \ , \ w \ .notdef \ s \ .notdef \ a \ .notdef \ p \ t \ b \ h \ s a h \ .$

$i \ F \ n \ i \ g \) \ u - p e r i o d \ r I \ n - e \ f o u r - t \ h \ i \ s \ p \ a \ a \ a \ n - b - n \ t \ d - e \ a \ , \ n \ a t - d_{g-B} \ r \ .notdef \ a - L o g o n e k \ W \ w \ t \ D - t_{t-t-a} \ .notdef^0 \ .$

$n \ ^\sim \ W \ D \ b \ p^0 \ \dagger \ w \ b \ h \ e \ a^0 \ n \ b^0 \ e \ t \ h \ e \ p \ o \ t \ s \ o \ t \ a \ c - n \ e - o - o g o n e k \ n \ D \ 1 \ e q u a l - y \ r \ a \ t \ c \ \check{o} \ D \ 1 = s \ C \ l \ o g o n e k - C N A K_r D C 2 \ l \ h \ y \ e \ i \ f - t \ h \ e \ s \ h \ r \ t \ e \ s \ t \ p \ .notdef \ t \ a \ .$

$t \ b - .notdef \ w \ i \ t \ c - r - n - N U L - .notdef \ - 1 - l i n e \ ^2 \ C \ s^2 \ 2 \ g \ t \ D C 2 - o - s h - p e r i o d \ s \ o g o n e k - I f - C D C 4 D C 2 \ h \ e \ t \ h \ s \ h \ r \ o \ f \ C \ 1 \ j h \ o \ e \ i \ n \ d \ e \ s \ c \ r \ l i n e - N U L \ _r \ 2 \ 1 \ C \ N U L D C 2 N U L \ .o g o n e k - C S O H C - s l a s h N U L - l i n e \ _s \ 2 \ 1 \ D \ f \ r \ / \ C \ f \ s \ / \ C \ . \ N U L E M \ l i n e - l i n e \ .$

$D \ o \ r \ t \ .notdef \ n \ t \ s \ p \ D C 2 \ D \ E M \ .H \ i \ e \ c \ .notdef \ e \ s \ e e \ .notdef \ r \ w \ h \ .notdef \ o g o n e k - l \ s \ o \ w \ e \ g \ e \ t \ t \ h \ .$

$C \ o \ r \ o \ l - I \ l - a \ a \ a \ n - b \ l \ d \ i - y \ .notdef \ 4 \ a - p e r i o d \ t \ r \ a d \ s - i - n \ a s d \ l - t \ .notdef \ a n \ g \ c \ .notdef \ s - p \ p - p \ .notdef \ s \ t \ h \ \dagger \ a \ a \ D \ p \ E M - b \) \ t \ h \ e \ n \ t \ h \ e \ l \ a \ e - t \ b \ a \ g \ v \ t \ o \ B - h i - p e r i o d \ _p / o - d - i \ s - i - f \ n \ a - a \ .$

$f \ r \ / \ C \ f \ s \ / \ D \ l i n e - N U L \ _r \ 2 \ 1 \ C \ a \ r \ .c - o n e = r \ s l a s h - s \ C \ N U L - n - l i n e \ _s \ 2 \ 1 \ C \ a \ r \ .o n e - c = s \ / \ s \ e \ n \ t \ e \ t \ h \ .notdef \ t \ e \ s \ p \ e \ c \ r - .notdef \ \overset{D}{l} \ s \ a \ .notdef \ s \ s \ e \ o \ a - f \ t \ p \ p \ i \ .notdef \ b \ y \ D \ .notdef \ m \ i \ t \ r \ .notdef \ s \ c \ .notdef \ , \ .notdef \ b \ b \ .notdef \ n i n e - r \ 1 \ s \ i - z e r o \ B - n \ v a \ .notdef \ .notdef \ s \ m \ g \ e \ o \ m \ T - e_o \ t \ p \ r \ , \ y \ l \ V \ o - o - a m p e r s a n d \ g \ l \ y - u \ .$

g e o m e tr i c d i la t i o n o r d i s t o f
 o r t h e d i s t o r t i o n o f a c one-l o 4;
 s [^{i-nine};1 n bracketright-d s h a r p e r b o u n d
 s i n t e r m s o f m i n i m u m - l
 e n g t h a r c a v o i d p l a n e c
 u r v e s t h e y a p p l y e q a n
 d S-bracketleft6]u-f o-l r-l if vu ar nt h e r d e v
 e l o p m h a v e d i s four-t.
 L e m m-L a-e t-four-b b c-period.notdef5 da n a l t
 .notdef r n a t i n g q
 def n t .notdef d i r W n D-a t b j-h s W D-b NUL c j-j a-n t W l w-c-DNUL a-d j
 f t .notdef e g a m b c-n.notdef t d_a.notdef NAK_d f r / C s C f t
 /period-period T h s mae b i o a s i m p l e
 q u r; t aNAK1d-period
 P r Io no fe i t h e r c a s Le e-parenleft a-
 m f-n_m o d a r a 4 t s. h 2 w e e w e fi n C d o , r u o,
 slti CRd-h-n_a g-a i r t-.notdef_y .notdef u-threeB-t.notdef-period-period
 b slash-ibracketleft-two B period-.notdef c/. i n t h
 L e m , m t ah 4 e . s 3 h d-o t r .notdef-a t .notdef
 e t s s t i a d .notdef c t h C¹ j m i b a r i .notdef p i
 .notdef c .notdef.notdef th .notdef .notdef a .notdef t .notdef r n a t
 .notdef b .notdef tw .notdef n .notdef a r c .notdef i n th b .notdef
 u n d a r i .notdef .notdef f h .notdef b a .notdef.notdef.notdef.
 H r .notdef ,
 a .notdef .notdef.notdef n g t s W x D-a b NUL t-j-c j y A s C
 i n o r o , lt l ha e r o-y v 4 e . 4 l e f a r /C-s s C f
 t / a s d line-line
 5 E s s e
 W e h a v e s e e n K t-i s h n a t t
 .notdef n-t .notdef h .notdef e b .notdef n d s .notdef
 n r .notdef p .notdef l .notdef n g t h , b c a
 f three-i-r b-n t-.notdef r r g d .notdef c .notdef s d s .notdef-t-s n-.notdef h c i-an^a
 w h i c h h .notdef c a l l d t .notdef p
 .notdef l .notdef g i c a
 b e t t e r r
 W , e e x t e n d K u p e r b C R e-a r f g
 a , k n-s-K i .notdef d-t s e fi s c a p t .notdef r i
 n g p K-a r G .notdef-t n-.notdef f r t b_{h-i} K a-t_k ln
 gl .notdef^{t-y} t t h

s .notdef g S D m a n-b .notdef tr m s quotesinglbase a .notdef k
 .notdef n p h t i t n .notdef s d .notdef c e t .notdef t o n n
 c i .notdef t h e s .notdef m e t w o e t c e
 s) .
 k n o-quotesinglbase--t t-g r
 D e fi S-n i-u t ogonek i p oo n d-CR e-r e h r e di s
 jo p t n .notdef-q s .notdef i m a k n quotesinglbase .notdef .notdef-t r t
 .notdef p h-d. T h e n e s .notdef y .t ogonek-h .notdef;
 t ^tn h -semicolon ees C R / r h r e D b .notdef .notdef d .notdef n
 s d .notdef d ogonek[b h y .notdef v t i h n .notdef k o n .notdef

n t r o n ogonekbracketleft - tCR. (W e .notdef l l o
w D f hyphen-a i n n d e i r n e t c .notdef r ī; n -.notdef l
a t t e r a r e ogonekbracketleft - či - e r - s tk a
g e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

n e q u i v a l e n F
 d i e g , u - i n s - r i e - t - a s - five o X - f W o D - H11938³ i
 period - l - l l - ogonek - o - bracketleft C R S O H - u w
 n o n s i d e i p - ogonek [ă r X - a l - H r p c a b
 ry - v e - am - l .notdef - l a - ogonek l - bracketleft n i o b o u n d n
 .notdef n n X W s c - e h b .notdef e .notdef d - s e d t i h
 n .notdef p
 t r i X - v i aS li inn c .notdef t h .notdef h .notdef m
 X l - i H11946 - s - .notdef g h y is s - fi t
 w e dotlessi - t ta o k he a v e l i n k - ogonek [CR - i.
 n T gh ni us m - dotlessid - u e - b n e t - i e - r h o m o
 x - t₀2i p e .notdef - y - pb - r.) a L b e a X s .notdef a pn h^d_D i - h.
 l n ogonek .notdef t semicolon - t2E M_{one - .notdef}.semicolon - r - X ; x₀ CR - slash b e
 t h e h o u m To . h t ogonek e o ; p - i ī sy n ; c e CR l
 s - i / h - a i s e ss n t
 W e s period - a y - ogonek ; ī s ; a t CR n / f i .notdef li
 s n t i n e h . ogonek n ;
 n o n
 N o w - N A K b l e at m e r i d - ogonek [CR - i nae
 x - noa - parenright l i - r o n - o p h (el i - k X_{n - n - period} t h e
 c (E h . m ogonek m ; u s ; a n C R o t slash - n o t ; r i - N A K
 v c141. .notdef ogonek l ; š et ; r C R e /.notdef s l .

ogonek *CRⁱ* *q*

F i .notdef u : I quotesinglbase t h r ogonekbracketleft - kh[CR t e - h e r d . r e - ogonek d ; t~
 s s e n i .notdef l . To s e t i D h period - s ,ogonek ; t ogoneksemicolon - bracketleftCR - t hh / e cp
 l i n k i n g n ogonekbracketleft - uCR, m a b n e dr n z e - o tr eo t w hia t t h
 i n t he kn H11938³ X . bracketleft - c - ogonekCR o . / m n p t l h i - e s m ^ n u t ht er
 s e g _____pm, q e s n o tw e e q u a - ogonek ol fl t - y ogonek - se - bracketleftCR i y - k s nt e h - o s
 T h i s n o t i o n i s c l e a r l y a o p o k
 n o quotesinglbase t .notdef t r e d h . F o r .notdef n i
 n t r o d u c t o n t o
 .notdef u f 2f - semicolon n - m .notdef - o e t h .notdef s
 i n quotesinglbase e .notdef rh .notdef p he hr .notdef v e c d u r
 s i t u .notdef t i o t h e r e is n o d i s
 t n t i o
 er t i c e s . T h e t r e e r c s .notdef p
 p r o .notdef c h i a f f e c t i n g t h e
 quotesinglbase - t_ o g p
 L e m m - I n a a 5 k - period - quotesinglbase 1^{n - .notdef} r o .notdef -
 ogonekbracketleft - ft - bracketleftCR e t h e . t ogonek - r i ; s - l e
 ; t CR - r o / n i f a n . d CR o ; in
 P r T - o h - of - e h o m h ^o_D ht - period ogonek - o p -
 semicolon y ~ nd - h⁰ D c h - CR. CR - slash - a s - semicolon p s r o e ;
 s ogonek - e e / d
 f r x₀a - m .notdef .notdef n g n d h e n r e t u r
 ogonek CRperiod - .notdef c Nk ow t .notdef e t hs h^{NUL1}t - h⁰
 G e o m T - e_o t p r_{o - comma} yl V ampersand - o - o g l y u

i s h o m o t o p i c ogonek[CR-o. a S p n a c r a l
t o-l r e u l s o h f-.notdef g r o u p , t h i s
p a r NAKa-period II lt e f lo GE c NAK-h-lc141 D o Em
o h-NAK0_{c141_{period-m-w}} line-line
T h i s c GE o h-NAK. m ogonek m ; u h t ; a-tCR t /
o c141 r e s u p i n t e d
i l l .notdef te r e o l-o f o-e ; i d t o
.notdef n s b e h e p e s
f o l o w s ^ rt e l-n ello ogonek p-bracketleft CR-s
l o o u .notdef n .notdef d e q d-t
f o ^ 1, o t wh se n l o o p s b a p , k a F
w-s iai g .

$$CR \text{ ogonek}_{\frac{p}{i}}^{GE^{h-NAK}} \cdot \text{ogonek}$$

i .notdef e NAK : .notdef f e i d i .notdef n ogonek-cu-bracketleft CR-r teh e-l_i nthi n c
GE NAK-h. ; ogonek r i - semicolon s h / c141-o m o t l o a pl o.
W e a p p l y t h e d e fi n i t i o

D e fi n-I f-i-K i t s-ia-o n k-a; b 2.notdef-K tl S
D a a-t-n d-b CR-s a i-a b .notdef y-.notdef t r n g .notdef
y i n-K i f .notdef r-quotedbl zero-greater-.notdef tv .notdef h
.notdef-r y-r .notdef " notdef x p i e r s t t s S s .notdef w .notdef t
m i t o .notdef h n .notdef f n
t .notdef a S-c⁰ u c-r h K [S⁰ a n e b e quotesinglbasenotdef e
.notdef d r .notdef p h .n a CR; S⁰_{semicolon-h} i-bCR/a
(s t r o n
R e m A rl kl o-five ". w p 2e-i r n t g r t b h e i
e n s u r e s
l o s e d i n t he s K-e t a n f d .notdef ll
l .notdef s t e s c .notdef .notdef n s t-S ih n-o a f tn .notdef -K_d
.notdef c .notdef l d a l l .notdef w t h p r t .notdef r b a t i
7 s h t h r .notdef s .notdef l t i n g d
.notdef .notdef S⁰ e " notdef t c i l
S i n C⁰ h n-.notdef ; it t h u .notdef c .notdef u .notdef d
b .notdef .notdef c a .notdef y k n a b o u t t h h
, h-a n-o m-d n-o t-o ot
I [n-three] i t w a s s K i-h o-s w a n n .notdef-t n h
k-a CR-n-t a i .notdef f i n t .notdef .notdef h .notdef - .notdef n-n
c .notdef n .notdef x t , th i .notdef f .notdef .notdef .notdef w .notdef i
m m .notdef di a .notdef b_y, b .notdef c a .notdef
X W D-H11938³ X K a r .notdef .notdef q .notdef a f .notdef
r dotlessi-a n .notdef v .notdef i n n k n i .notdef n t , i i K i s
h .notdef m t .notdef X p Wi .notdef c ca a-l l-n y st
r Di .notdef h-i an quote-l
s t a
G e o m T-e o t p r , y l V o-o-ampersand g l y u

12 *Elizabeth Denne , Yuanan Diao and John M Sullivan* Theorem 5 . 3 I
 $a_{f\text{-semicolon}}$ b 2 K a n d CR a a n-.notdefCRb-t_dh-a r .notdef i
n .notdef .notdef.notdef K i s-i a .notdef.notdef n

P r L-o e-S-o b f-t .notdef t h .notdef-a b-s p c-.notdef
r a t n .notdef tr b .notdef d i f n .notdef c .notdef
n CR.notdef-a [S a h n-CR b a bracketleft-d S b .notdef n d d i s k s
r K-.notdef mG l .notdef t h .notdef s .notdef t S
t d f i .notdef s r k-Dm-s spat a K n i .notdef s-.notdef-n h-ti-k
i m a y h a v s l f i n t .notdef K-r sw
.notdef h c it ci h i-n s D , B y D .notdef h n quote
s l D-.notdef bm y m aa n .notdef-w .notdef m cb a K
n-d-i r-d-s .notdef-.notdef d-n-p line-line-k-l
D e fi A-n is t a i b-c o K-ai-n n s s-t s i n t-b
i ta CRh-a l a s n .notdef-CRb-d a a r .notdef.notdef c .notdef A
s a c-i b s sa t n r t o n i g CRa-f l b-parenleft y o e
r s , s e CRb-q n-parenright a u ii i sv a a l tl re
T o c a l l a a b q cs u ds a .notdef d n r t i s a e l c ,
a n c t .notdef .notdef l d s .notdef c a a b-b_n act c-n s d-a
d l l b .notdef s s n t i a l . B t h .notdef
q .notdef a d r i s .notdef c a n t , w .notdef
r q i r .notdef b .notdef b .notdef .notdef n T d h e d
o-comma r-a n s e i mm n three-e .l y-five t h o s e
s e a l o n g t h e k n o t . T h a
t i s , f o f o r fl i p p e d q u a a ab d
n-c r d-m-d_i .notdef s s e t c b a .notdef n .notdef t s s s t q
.notdef a d r i s .notdef c a b n m-c_t .notdef ss , t t bh F
.notdef .notdef i sm g i-s s u h-d-.notdef o-n d e l w seven-i-.notdef
s a e s s e n t i a l a n

$$\begin{matrix} & & d \\ & & b & c \\ B - C & & a \\ & & A \end{matrix}$$

i g r 7 .notdef h is t r f il k n a .notdef b-t ic
a l t .notdef r n a t i n g a b n-i_c d-s .notdef.notdef ss ss .notdef.notdef n-n tt i-i a-a
as ab .notdef n-c d-a-d r .notdef s s .notdef n t Ai B-a l-i_C s-parenright D s Qi .notdef m a p d
s i A-n a-c-B e C d D-a r e i n e s B-s e i C n s t e i s a
M o r e f o r m a l l y , w e c a-n-
ns g e
D e fi n-A n nt s i .notdef a-o_{c-one} a two-na-colon colon-n-a_n i
t-colon .notdef .notdef n i fi .notdef-ah-.notdef a i-a a_{i-v} C_1 .notdef
n t i a i
s u c h t h a CR a t-i a_{iCone}-o an C R e-a_{id-C_1} a-o_i if nt
c h l e u d-a_j K u p e r b e r g i n t r o
d u c e d t h e
G e o m T-e_o t p r , y l V o-o-ampersand g l y u

Theorem 5 . 4 I $K - f i$ s a n n t r i v i a l
k n .notdef t $K - p h$ a s a n e s s
A s m e n i o n e d a b o v
e , $K u p e r h$ e a c t u a l
l y a o b b c h - t d a i .notdef n a e l d l a - a t
b - b - q_h c - au - r .notdef - a - c - n a r .notdef .notdef s s .notdef
n t i a l . S i n c t h i s i s
d .notdef .notdef n i t i .notdef n .notdef f s s .notdef n t i a l .notdef t
h

p r o
K u p e r b e r g u s e d t h e f a c t t h a
i n o r d e r t o s h o w t h a t e v
e r y q u a d r i s e c a n t f o r e v
e r y k n o s u c

6 L i m i t s o

B e i n g e s s e n t quotesinglbase i .notdef r
a p l h period - i s n a .notdef h .notdef t l m i t o
f e s s t i .notdef l e c .notdef t s quotesinglbase e

w t h .notdef t .notdef i e n .notdef n y k o t t d .notdef r .notdef p o
u f .notdef c C^1 y n - c .notdef o) i e .notdef parenleft - i
i n t .notdef .notdef p i c . O u r d .notdef .notdef n c .notdef n d
i i .notdef n , .notdef t .notdef c a .notdef .notdef h .notdef r
.notdef a .notdef c a n t h a .notdef
t h u s n o t a k n o

H e r e , h o w e v e r $C^{1;1}$, a o n u - d r .notdef g - k
i n v o a t i s m p - a f o r t h e l i m
L e m m - L e - K - a b t - s i x .notdef a 1 k n .notdef FS 0 > f
a Kn h e d C^1 k n - k .notdef n t .notdef - w h i c

K i n t h f .notdef l l .notdef w i n p - g a s p - n^0
dn e s - w i .notdef i c .notdef - quotedbl r < t^four - r
a n d t h .notdef i r t a n EM - g 6 = .notdef - n h

K a - v .notdef - nn - K - c^0 dt e .notdef m - r b s e a - nt $\frac{i}{r}$ t h e
i s o t o p y c a n b e c h o ”

N o t e t h a t t h e r e t h e c o n s t a n t s t a
n s h e f r K - o t .notdef - K - m^0 x c e F S two - s = .notdef c a n
h a v .notdef s t r a n d
t a n g e n t EM v - two we ec t - c o - a rn sh ea
x $K_{period-e}^0$

P r R - o e - o f - s c - K h a a l s e .notdef s n o i quotedbl -
t less - t - one = 4 h C - i l - c K k a i n r s ls y - s - t i a

ar K - u .notdef a c h - p^0 2 K - p^0 or i r e - n t - p o n ds t o o - p t w o - m e - K o b n .notde

a .notdef n i q .notdef .notdef p zero - n 2 K a wr h s t - c
hp i .notdef i j p^0 N U L p - i - t j t - less h ” f - p - i^0 n e n - d i t h 2 ”

f - p B L y e m , m a h 3 e . a 1 p o c l - p i e s n
a g - a t r h - two - m c - quotedbl f - s s r - i

G e o m T - e o t p r o - c o m m a y l V ampersand - o - o g l y u

a n g l e b e t w e e n t h e 2a-t a r n - two_{c-quotedbl} g
 < i - three - e EM - n - n.notdef h - equal v p - e⁰ p c
 hu s i the n p 0 a d n is d k h a a t .notdef t a n g .notdef n - EM t
 2 = .notdef f c t p - hr - zero w - a_I n t th a
 .notdef r K .notdef , t r a n v e s e o h e f o i a t o n f t e t h i c k
 s o o py K - f⁰ o K a s t h .notdef .notdef n i .notdef n
 f i s .notdef t .notdef p p⁰ p 0 c .notdef n i n g th
 .notdef t w a r d .notdef t .notdef t h .notdef x .notdef d b .notdef
 u n
 t h p⁰ w n h i c h m o v " .line-line
 P r o p I s f C - i^{1;1} i - k - h_{neo} K_i n - .notdef a 6 .notdef..notdef.notdef2.notdef .notdef
 n CRt - a^{b-i} i a - a n .notdefi - a f r h - K_{c-i-e}.notdef - c.notdef n
 i C - n¹ .notdef.notdef .notdef t h i c k K i w m a - i - i_iexclam -
 t_an - a .notdefn - b_id - exclam b t h .notdef CR - n a i t .notdef h
 .notdef.notdef.notdef

o - K. *f*

P r W - o oe fc a n r e a_i D d a u b_i D c b b t y o
 a t p h p e l c y a i s n (a p p r o a c h K - i_i.

G i v " e zero - greater_n w a .notdef n p y r .notdef 2 " p t e
 h r .notdef t r .notdef - a m - i - b t - s a i a k - o i o n f g a
 quotesinglbase. T h e n CR a i_b s - d ee fi
 F o r l a i r g - t e - h K - e_i i - k n .notdef n o i u quotedbl - t
 g i h - n - K - f L I_i b t t h .notdef a b i .notdef d .notdef.notdef c
 r i L b e .notdef d m i w - m n K - a ^D₆ I - h_i.K_i one - slash. S K_i i
 .notdef.notdef.notdef n t i a .notdef , b
 c a n .notdef n - quotedblnotdef d p e - a r n t S_i⁰ b - f S_i t c - i o
 quotesinglbase_i W a K - D_i[S_i⁰ i .notdef a n .notdef m b .notdef d d
 quotesinglbase .notdef r p h S - period_i⁰ W⁰ S e - D - I_i.^{S-t_i0}/ it .notdef i s i s
 2t - quotedbl pheer d eu s a - i b t - B di y - o d
 K_i[S_i⁰ i s i s K - o[t - S_i⁰, o sp oi c - t t - h e o l a line - line - a
 C o r o E - l l v a e r r y y C^{1;1} o - period - k n - three n
 o t tr i - h v - a s - i aa ln
 P r A - o o C^{1;1} k n .notdef - K i C¹ a i i t .notdef f p
 .notdef y n .notdef m i a .notdef k n .notdef b .notdef g .notdef n
 .notdef r i c i n - one 3 h .notdef h .notdef n n - T b .notdef h y .notdef
 e o t rh ee my 5 h .a 4 v e e S o m e s u b
 s e q u e n c e o f t h K e w s h e e s s
 e P n r t o i p a .line-line
 7 A r c s b e
 W e s C h o o - r o t w l h l - e aa d - t r e i - y
 v six - n - C^{1;1} three - r - k_{ny}.notdef t n h o - a .notdef n a t n r .notdef
 i .notdef c a n t .O u r a im i .notdef t .notdef n d t h
 .notdef .notdef a - CR_p.notdef t_q.notdef r n a g thhi c - K ka a
 h i s t .notdef g .notdef t b .notdef t t .notdef r l .notdef w .notdef r b
 w h a t h a p p e n s w h e n a

T h e o Sr ue p $m - CR$ a i 7. notdef o $i - period$ s 1 e h .notdef
b .notdef u n d a r y .notdef f t h .notdef.notdef.notdef K
.notdef h $CR - a$ a $t - i_c$.notdef i .notdef.notdef s .notdef n c_i a
.notdef, b u t t h .notdef r .notdef - K a i - r .notdef t i h n .notdef.notdef
n .notdef .notdef n - d t c l o a as $n - e - c$. $t - d$) o T - Kh - m
e u $n - s$ t i n t e r s _____ e - a, c - c a t n t
dh e - i i s s o m e e a s b - period
g e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

Proof I $K - f d i d n .notdef t i n t .notdef r$
 $s \underline{a} cc tn ta h c im n r a - .notdef am c - n dt$
 $h .notdef n a l l n .notdef a r b y s .notdef c$
 $quotesinglbase - a .notdef .notdef n r t .notdef n d h u s w o u l$
 $d .notdef l l a a e n - c a s d r e t t i .notdef - h l . r$

The s e

s .notdef m .notdef a r b i L - c S .notdef - a t - c S - n⁰ d e n
 $two p e t u b \underline{a} t c on s r quotesinglbase - f_m .notdef i$
 $i K h s .notdef c .a - h C R; S_{semicolon-t} c h - CR/a a s t e s e .$
 $n a C R; i - S^0 .notdef c C R / a b s u o t . (T b e C R a a i_c$
 $us s e e s s e n t i a l , a n d t h$
 $F o r c l a r i t b y - i s - comma w - t h e$
 $.notdef fi .notdef r - K i s ln t y t a p - h s .notdef .notdef aic - a - u$
 $nn m - n tt$

S a n - S⁰ d if e me el y go g to th e w - Kn - o d .notdef
 $b a ar F s i - ni - t g . (W e w i l l r e t u r$
 $n t o t h e m o r a - e i s a s t r .notdef n$
 $g l y .notdef s s n t b - i c - a a l ns ad b - i_{t-c} c - s - a$
 $e s s e n t i a a S^0 b S c$

i g r .notdef a - eight c - i s S .notdef - .notdef sc a - s .notdef nnt t i a l b .notdef t .notdef
 $T h e o t r he e mr 7 . m 1 u s t b e - a b c - b n .notdef e c s a s .notdef e$

p .notdef r t S a b n - S⁰ d f $\underline{t} - ai - c .notdef - h n c - s h a r .notdef .notdef s s .notdef n$
 $B y t h .notdef d .notdef .notdef n i t i .notdef n .notdef f h W s D - h period - s a$

$CR; S - n; c - t C R / a \underline{l} o - comma n$
 $E M_1 .H 11938^3 X K / b h - u 0 W D - h . a C R; S^0; c C R / a s t i$
 $v i .notdef l . Si n c z e r K - o , wt ih t e h$
 $y d c f f e r n o K noe b - n (a - l y - r - s e be$
 $c h a n S t S - e - .notdef^0 f u r a l m b y e r i d i a K s o .notdef - op^{m-a} r$
 $.notdef w n h .notdef$

a CR - r a c c .notdef a y n - a .notdef L - a i .notdef t - n⁰ e t sta

nd a r d l p s r e p re se

l s e (a s i n t e .notdef n i ti n o f s e nt i i) h , i n - c d h c

l b n ac n d t h C R a n T - b_h .notdef a
 $c - a dotlessi - k^0 a n a l t l - n h o g o t o pi c m$

u bar c is h o o t op c t b - o p - a .notdef a h l - i 1
 $e - dotlessi - s 1 m - t - s_{oh} a m o - n t s l_a c$

a .notdef a - n b a F s i i g . n u T l - r_{ah} e - r u .notdef 9 s - p r
 $.notdef .notdef .notdef n t .notdef h .notdef n t h i s i$

d e f i a n i b i s t si to r n o I n f u l l g e am - c
 $e a r y a l - K i - n i n t .notdef mr , as t .notdef - n h y e t p s e i c n$

B .*notdef* t s t i l l , t h t w h a f n-h-.*notdef*⁰d-n
f d e r b-m y s .*notdef* o n e t .*notdef*
g e o m T-e_o t p r , yl V o-o-ampersand g l y-u

$\iota_a^0 \quad \iota^b \quad c \quad a \quad l \xrightarrow{ab} b \quad c$

$b_a \quad c$

F i g r .notdef 9 .notdef A t t h dotlessi -.notdef t n
 d -.notdef -dotlessi0 p re l - p r e -.notdef f e t - n t ing .notdef t s - h e l a s
 h -es-a n-h0 d i s n ro m the ss e nt ia lan d i n e s s S a S⁰ d f
 $\underline{\hspace{2cm}}$ aa-c s F i i n g . u Br ee i⁰8 a n u u l l-s-e o to i c a

am m o ti t o pa i t h o w s it i s h o o l \overline{a} o b t i -.notdef c-p r

a 1 a-o .n-b Ag t t h e b o t t o m w e s e e
t h e d i ff S-e a r e-S-n⁰ d-n c c a e t u-b e t b w y
w e-r a e p p-n ng a d ff
o u K a t s .notdef m .notdef n i t .notdef n b_{m-one};
b b_{.notdef-k} r a .notdef semicolon -F_{f-i} n-i g n . I n p a r
t i c u n i l w a r-h a , v .notdef S h-o a -r r t n-a_{s-i} p o
s-r m e m i .notdef n b-a_i a S n o e . W c an c ha S t
S-.notdef⁰ o P n_i t .notdef p .notdef, a t .notdef a c h .notdef
.notdef.notdef i mp .notdef k i n d f F c i g a . n u A .notdef
r t h e .notdef w 8a-n i t n l e a s t c h a n g e
f r o m e s s e n t i a l t o i h

j u s t b e f o r e s u c h l \overline{a}_i a slt oe
np gc s a-a i -operiod -n
N o t e t h a t b e c a u b₁; s e b_i :
o - one .notdef f f ; t h i-h e .notdef.notdef - i g .notdef - K t h
.notdef l \overline{a}_i i -.notdef .notdef no t-p p io ui que yde .notdef n e ; it
h l b e i t rp ret e ro un t o se p rev io us i nt ers e ti on p i n s h
esa S-e d ay .notdef t e -.notdef S r C .notdef n v .notdef n t
i .notdef n l \overline{a}_i h epr W s .notdef v ts t r e , on W t r -.notdef iv
S ia .notdef.notdef ho t-m h h .notdef y-a d .notdef .notdef n i t i
.notdef n .notdef f s t r .notdef n g l y .notdef s
s n t
G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y u

$$\begin{array}{cccc}
 b_1 & b_2 & b_3 & b_k \\
 aSOH - SOH - SOH & c \\
 S & S^0
 \end{array}$$

i gu e 1 0 : _____a n i - c c a n s e t K a t - s .notdef m - c t - a sn y
 p .notdef i n t i n .notdef s s .notdef n t S - i aa l - S^0 d - a
 p n .notdef t r t s .notdef - e r b fe a y i n i t - n e a r o u n d i
 n b_i.

i m m e d a i_ib - i - a .notdef t .notdef e r .notdef y n g t .notdef y - h
 a .notdef t .notdef n b_i - c i a s . B a y l y - s .notdef m
 s - .notdef
 T h b W u b - D_{i-s} i s t h e d e s i r e a b - i n s - c t e e line - line - n
 8 M i n i m u m a r c l e n
 W e w i l l i m p r o v e o u r
 e s s e n t i a l a r L e m m - I f a s
 a - eight e period - i_b c s - one a e n s t s e n t i a i ja
 n b j one - NAKcomma - k n - a
 i f CRa - a ir sc e s s ` a e NAK_b EM - n.

P r I o j a - f o b j < 1 t h L n e b m y t m ha B b . a d - one l i l - a a
 cbm .notdef .notdef n t t .notdef a r

n .notdef t CRa - t b .notdef d K aNr wc f (.notdef sr a a y n S y ap b h r it c .notdef
 r CR - .notdef a m w c a n CR a p - bracketleft S b n y a n
 .notdef m b B dw dh .notdef .notdef d s d i - i d i s j
 K - o i T n ht i f sr CR a o - mb - parenleft e - m a an n - a d) b
 t it hshu ia s
 K n o w i n g t h a t s u f fi c a
 a - i r - e .notdef n i t n - l .notdef y s s n .notdef w t h
 .notdef CR - s a h h .notdef - i c r h t i .notdef .notdef .notdef s .notdef
 t .notdef .notdef a - T - n t r h i e - a - c .notdef o t F r h - r ee m r - m
 e 7 m - period 1 a p iq t h b a - .notdef aph p - n s - d
 q s cs .notdef - a n n t t i a l , i m - a ap q - n a d
 .notdef t B - s .p i - slash. d S .notdef a n i - p c e - s .notdef s s
 n t i a - q l , h p - b a y - CR - two - v a t m h a .notdef n
 t h a a i q - s r e v Ce r - o s - r o - ew^{d-l} l - e : a - a - g F
 NAK_b ray - to q m - three - EM. line - line
 I n t u i t i v e l y CRa - comma b w a e k e
 x - .notdef t p .notdef e w r t - a a - p a n t .notdef e .notdef m
 p i n .notdef n th .notdef c .notdef m CR - p b A .notdef .notdef
 tn .notdef - t agrh y - j - w a NUL b j - r - n c D - two .notdef c
 G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

*h a `a v bDEM w h j a -eNUL b j < 2 .notdef .notdef x p .notdef
 c t a b `a t E t v .notdef n r t i n f a c a CR - n
 a .notdef i .notdef g .notdef hntii na .notdef a d w r a p a r
 .notdef un d .notdef d e r i v e t b*

*L e m I CR - a - f a i 8 . a n - two .notdef .notdef .notdef .notdef n
 ti a .notdef ar ci n ja NULn - bj < 2 t h `a e NAKb n - twoEM NUL2
 a r . j a - cNULs - b j =two-i /.*

*P r N - o o ft j e - aNUL b t - j OE - h^{two-one}; a - twoc141 t
 2EMNUL2 a r . j c - aNUL b j = 2/nDC45EM 3 = A s p r .notdef
 v i .notdef CR - .notdef a b .notdef p t r .notdef .notdef h f r , t
 l .notdef t t .notdef a n a t n i a d .notdef .notdef a r - n c d f r a a
 p Wq .notdef h b a CR - two a v .notdef - a n `a d NAK_qEM s o w m
 .notdef `q < 2EM - s 3 = m r e t h .notdef
 t r i v i*

*S i CR_{q-n} i c .notdef .notdef e .notdef .notdef .notdef_{q-n} NAK_pEM a
 .notdef_{greater-q}, b .notdef b - .notdef 2CR_q p I f - b B - two. p / h e t h e
 CRw - a q*

*t a y p B - u. p / . i L - dellipsis te o t e t h e r
 .notdef@ B . p / s F - p i rⁱ⁻ⁿ o g . u F - c r
 a ellipsis a ellipsis^b ellipsis_{ellipsis^q} b q*

*f r .notdef 1 1 .notdef LI en mt , m - h pa r p 8 o CRj - atwo - .notdef .notdef - e .notdef c - t_h.notdef -
 a r .notdef pi dn c r .notdef a s .notdef s n i t h .notdef r i t s l
 h .notdef p r .notdef .notdef c t .notdef d c .notdef r ellipsis a a i ellipsis n - q_d cw lh .notdef i dc h*

*l e n g t h
 L e m , m t a h 3 i . s 3 p r o j e c t i o
 j ellipsis a NULellipsis o - b j e a - DC4 s b - j j n e .notdef 2EMNUL2
 a r . j ellipsis a s ellipsis - i b j n - equal2/NAK2EMNUL2 a r . j
 c - aNULb - s j =two-i /. n It t h e r
 c o s d CR a SUBat - t_B. p e - slash. c F o e .notdef n
 y x - t,w - ytwo - o @p - B.p - o/ n t s s d i s t a n c
 two - e a b r . j - ec - xNUL y j equal - w2/. n T - e*

*`a bD_a C - q_q NAK_bEM C 2 a r . j q - cNUL b j =i - two /
 D EM C 2 a r . j - c a NUL b j =two - o / s D 2EMNUL2 a r . j c - aNULb - s j =i - two /
 less - m1 e t L h - CR_q.notdef b t - t .notdef t h .notdef .notdef h .notdef r
 t .notdef .notdef .notdef .notdef .notdef n q i
 a n d j q NUL y j two - t_{NAK}.notdef S i_q n_yEM >_q ` .notdef h a
 b - v .notdef - twoCR_q y L .notdef h W D - pNULj - y j D_{C4y}
 G e o m T - e_o t p r_{o-commma} y l V ampersand - o - o g l y u*

a n d n h o - twoQE^{t-zero}; 1c141 - e i t b - h2a - B - e.t - p/. (F - S
 i e g . u) rS j q - eNULy - one j n2c - twoNAK e - w.notdef
 j p NUL q j two - NAKNUL h `a.notdefNAK_qEM 2C - equal f 2 . h / C o r
 o . l Ol n - a t - r y - h e 4 period - o
 `b DC4_pEM 2 = b L y e m) m a àqn3yperiod - EM 1 w e h
 `q-.notdef NAK_bEM 2C - equal_y NAK_pEM 2equal - C h
 h `a NAK_bEM C f 2 . h / C h A n .notdef l .notdef m
 .notdef n t a r y c a
 s i d .notdef i s a n i h - n2c - OEO; 1r - c141 .notdef m a i s i i i - n - h z
 D 0 d - f w .notdef.notdef h n .notdef cr t .notdef
 i EM - s C f 2 / D 7EM 6C - equalp - line3 > 5EM 3equal - period T h
 a t i s ,
 `a NAK_b5EM 3NAK=2EMNUL2 a r . j c - aNULb - s j
 =^{i-two} / line - line
 a h_p^y b x q
 g .notdef r .notdef 1 2 .notdef I n t h .notdef m .notdef L s e t m i , m - n w t - a e - CR - ra - eig
 .notdef.notdef r .notdef t .notdef nt a - i a .notdef - g a - i r v c i f r .notdef g a n a p sq .notdef.n
 CR_q t b t .notdef.notdef r .notdef t .notdef nt i - q a g a i r v c i f n - r .notdef m g a n q .notdef
 Lc - y j .notdefone - NAK a j - n x NUL q j 1NAK s .notdefh - t D p j y j - n g - e .notdef j v - pNUL q j tu
 I f w e d e fi n e t
 2EMNUL2a r .r - c = 2s - slash i - i 0DC4_nrDC42,
 g . r / W D - parenleft EM i rNAK2.
 t h e n w e c a n c o l l e c t
 C o r o I CR - l - f a a i r s y a 8 n e 3 s s e
 K o tfi u a nl ia tr
 `a NAK_b g . j a NUL b j /
 9 M a i
 W e n o w p r o v e r o p e l e
 f o l l o w w i n g l e
 G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y u

Lemma 9 . 1 Recall hat

$$\begin{aligned} f \cdot r / W D \text{ line-}NUL_r & 2 \cdot 1 C \arcsin .1 = r / ; \\ g \cdot r / W D \left(\begin{array}{l} 2EMNUL2 \arcsin .r = 2 / \\ EM \end{array} \right) & forrDC42; \\ g \cdot r / W D \left(\begin{array}{l} 2EMNUL2 \arcsin .r = 2 / \\ EM \end{array} \right) & forrNAK2 : \end{aligned}$$

Then , for $r NAK1$,

(1) the minimum of $f \cdot r /$ is $EM = 2$ and occurs at $r D 1$,

(2) the minimum of $f \cdot r / C g \cdot r /$ is $7EM = 6 C$ p - line3 > 5 : 397 and occurs at $r D 2$,

(3) the minimum of $g \cdot r / C r$ is $EM C 2 > 5 : 141$ and also occurs at $r D 2$, and

(4) $t h e m$ two - i f $r - n/C - i_g.m - r / C r - u i$
 $s - m o .notdef nine - f_{:s-three} t - seven a .notdef 7v - n4 d r .notdef r EM$

$P r N - o o o ft fe st ih n a r t e g i i - s n c$

$.notdef .notdef, n - r - .notdef NAK_s 2 t .notdef a h n ts ft .notdef h r$

$c c .notdef r i r 2 \infty$

1; two - tc141 h w h .notdefe - $f^0 D r \frac{1}{r}^{r-line-n-NUL-g^2} 1 a .notdef g - n^0 D d$

$2NUL - equal^{NUL-line} 4 r^2 E .notdef .notdef m .notdef n$

$c a .notdef c u a i n .notdef t h n g i v .notdef t r EM1 : zero - .notdef u - zero i$

three - t s 0 w a - .notdef 5 wa p n .notdef t l

e x p r e s s i b F l ie g i . S - line - line

g u r e 1 f 3 r slash - period : n d - L - g. r / f r two - r \infty 1; 3c141 a .notdef n p d l i - o .notdef 2 f r slash - period C g . r / C r f r - o 2 \infty 1; 1 : 0 c141 - zero.

T h e o r - A ek mn 9 o . t 2 w i t h a n e s s e n t i

1 EM03equal - C2line - p3 C 2 > 1 : 95 period - three

P r R - o oe s - f c a K t e - .notdef t h h a v e .notdef

k n n a i - o b - t - t bc .notdef h t i h c .notdef kq .notdef - n

r K i - .notdef n - n t t h .notdef .notdef s .notdef a l K

a - i `y-a-s C - period b .notdef C `c .notdef C n_a t a h b - .notdef l

l r - e D a j b j , s D b j c j a t - n D d c j d j .

C o r o bl o - l CR - u a r n CRy - b_d a eight - s n

CR - period d - c 3 T qua d r i .notdef .notdef c an ti

e - a eight - r - h ; s ; a - t - period NAK one - one e a L n e d m m - m a - a y 4 b - period five - e

G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

the length of K is at least

g . r / C g . s / C g . t / C NUL f . r / C s C f . t / SOH
 D NUL g . r / C f . r / SOH C NUL g . s / C s SOH C NUL g . t / C f . t / SOH :
 in c t h s i s .notdef u m o f f u n ct i o n s i n
 t e r m s e p a r a t e l y . L T e h m e - comma ms s a o 9 at . h 1
 a c h r $\overset{e}{D}$ s v D t e D 2 d A a d - t d i n g t h
 .notdef t h r .notdef .notdef v
 o K - f i s a 1 t EM0 $^{l-three}$ equal - C2three - line - a - p C
 2 > 1 : 95 period - three line - line
 T h e o A - r k - e mn o 9 t - period 3 w i t h a n e s s e n t i
 1 EM03equal - C2line - p3 > 1 : 93 period - three
 P r R - o oe K t - c .notdef a h e - a v .notdef .notdef n i - a t - b b
 t - c .notdef h - d tihc .notdef kq .notdef .notdef a s d
 l r i .notdef n K t - i $\overset{a-s-a}{C}$ - t_{i-b} C - .notdef n - d C - commat s h i .notdef n l .notdef - .notdef
 a .notdef e , m r a m m nLa d e 8 m . b w - m - one d ea h - r ; a - tNAKone - v - one e .notdef a
 t CR - o a a CR d a nC d o r o tl o - CR b l aa CR - r
 c period - d
 T h u s t K - h ie s la
 g . r / C NUL f r / C f s / period - SOH C g . t / C NUL f s / C f t / SOH - period
 D NUL g . r / C f r / period - SOH C 2 f s / C NUL g . t / C f t / SOH - period;
 .notdef i n w e i ni m i z t h L t ee r m .m - s s - a - W e 9 p fi - period r^{n-one} .notdef
 o K - f i s a 1 t
 EM0 $^{l-three}$ equal - C2three - line - a - p > 1 : $t-nine$ 3 three - period line - line
 T h e o A - r ek mn nine - o t - period 4 w i t h a
 n e s s e n t
 l e 1 a : 65 $s-period$
 P r R - o oe K t c .notdef a h l a e v .notdef .notdef n ai t - b bc t .notdef
 d h - t ih c .notdef kq n .notdef a sd s - K
 i n t h .notdef s .notdef a l w a K - y i $\overset{a-s}{C}$ -
 c - \hat{h}_c .notdef C b C $\overset{h_d}{d}$ A r a - .notdef i p
 r D a NUL b j , s D b NUL c j a n - t d D c NUL d j .
 T h e q u a d r i s e l c e a m a m t nLa di e 8 s m . e w - one m e
 s - a r ; four - s - e ; t .ne - one2
 m m - m a - a y 4 b . e - fiveCR d a w p a p p lC p i o .notdef e y r d o tt o - CRa - o l a a n
 C o r o tl CR - o c l .
 W e fi n d t h K a - i t - s t - a
 NUL f r / C f s / period - SOH C NUL f s / C f t / SOH - period C g . s / C NUL f r / C s C f t / period - SOH
 D 2 f r / C NUL2 f s / C g . s / C s SOH C 2 f t / .
 .notdef .notdef i , w e c m i n i z e n L c e m period - v .notdef - mH - r a i e 9
 r o p e K - l i es n ag 2t - EM C
 nine - h : 3eo a - greater - sevenone - f_{7colon-s} 65 $t-period$ line - line
 G e o m T - e o t p r , y l V o - o - ampersand g l y - u

Theorem 9.5 Any nontrivial knot has ropelength at least $13 : 936$.

Proof A n y k n o t o $C - f^{1:1}fi$.*notdef* $n - C - b$ y t e r $o - r$ i $l - o$ tl
 p h a e a r l s y e

q u a d r i s e c a n t . T h i s m
u s t b
a b o v e a p p l i e s ; w e *line-line*
I n h e r d o [c-five], t Do $r - e a - n$
T h e o A - r e - n y m n $9C^{1:1}n - k - six$ $n - t r - o i t v$
hi a a sl a n e s s
C o m b i T i h n e g o g trih
C o r o A - l l n a y r n y o 9 n . t 7 r i v i
1 :^{six-l} 5.
e n o t e t h a t h i s b o
u n d i s b [4, C o n]_{period-j} e W c e t a u
lr se o 2 n 6 o t e t h a t o u
i C - s¹ a t - b c a n n .*notdef* t s i m .*notdef* l t a `c n a .*notdef* - n_b d
d^s.*notdef* s - n - l E M y 1 : 0 a 0
r .*notdef* b a b l y a c a r .*notdef* f .*notdef* l
a n b a a n - c - l c d - y .*notdef* s l - i d
s l i g h t l y b .*notdef* t t .*notdef* r b
notdef.*notdef* n d . H .*notdef* w .*notdef* v
t r e f o i l k n o t s w i t h r o
p e l e n
m u c h f u r t h e
1 0 Q u a d r i s e c a n t s m a y
Q u a d r i s e c a n t s m a y
b o f a n o n n t s r c i a v n - n i t s l a c i l
an l n s t - i a - s n n a k r - d c a n b c l a s
s i .*notdef* .*notdef* d i n t r m s .*notdef* f
o f t h e l i n k . W e b e g i n o
u r c o
a n y n o n s p l
L e m m S au 1 L zero - i_p s o 1 a s e A i - i n k a , c a .*notdef* L - n - m
ndp .*notdef* .*notdef* - t ns pn l t
tdef l i n k a 2 A - .*notdef* h t .*notdef* h n r .*notdef*.*notdef* r i - a a⁰ n a - a y at 2 A - r b - i_s - b l
o n s o m e o L h - h e - a s r u - c n - o im
A - p t - h_o ahnse cl nke t two - n_{EM-n}.
P r F - o o - o f - r t a h t e h g i .*notdef* n - v e i n - a n⁰ a .*notdef* a f
a s l - k s l - p a - A s n .*notdef* B - i c .*notdef* c - A - a
i s n .*notdef* t L X A p l - t i h i f s r d .*notdef* im s - L X k - A m a
t - .*notdef* ss t b b m .*notdef*.*notdef* hcpi .*notdef*
t h .*notdef* d .*notdef* s r - L .*notdef* - h d - a s r n - i s i .*notdef* t c - A s a ht
ia tcy .s - B - k period - I b slash - n .*notdef* .*notdef* s t - o s
C o r o , l wl e `a^h NAK_a - EM a
three - v n - grave - e_{a-period} 0_{a-d} NAK₄ EM. *line-line*
G e o m T - e_o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

T h i s c o n s t r u c t i o n o f a t r i s e
l i n k p r two-o. parenright-b 1 T e h m e . l e S neg et h b
o u n d c [4 , T h e] , o a r n-e dm i 1 m 0 m e d i a t
e C o r o A l n a o r n-y s 1 k-p cl .o-i2t-m p-l i o
n n ke nw i-t s -two- $t_{EM}h$ -kh-period
T h i s b o u n d i s s h a r p
i n t h e c e x a -two t_{EM} .
W e k n o w t h a t n o n t r i v i a l
l l i h a v e q u a d [1 r] six-w-i a-s e-s c t
ah n t fis r . s Pt at no ns w
f o r c e
P r o p o Is A a t n-B ad or .notdef-n d-one i 0 s ..notdef3 in t g
.notdef n .notdef r
t h a t n .notdef i t h .notdef r n i s h .notdef m
.notdef .notdef A-p[B-i
h a s a q u a d r i s e c a n t A n B t
.
N o t e A h r-B-a i t s , .notdef w n h k e n
n t t .notdef d P a n n w n .notdef n .notdef .notdef
r .notdef l i n k i n g n .notdef m b .notdef r
. .notdef h .notdef l i
K u p [one-e] r-e-three x-b e-t e-r ng d e d t h i s r e s u l
t
n o i n f o r m a t i o n a b o u t
t h e o
e s s e n t
P r o p o A-s g-i t e i n o e n r 1 c-zero n
4 o n t r i
H e r e , a L i e s c a-a .notdef n t o m
f a a t i-l i c n a k-l l y .notdef
c .notdef m p L-.notdef n I .notdef n it ts s .notdef n d p .notdef i K-n
tw s .notdef a-a r p .notdef p .notdef l
d .notdef .notdef n i t i .notdef n .notdef f i n s s .notdef n t i a L l n
s .notdef .notdef t c
c o m K-p.
C o m b i n i n g K-Pr-u p-o p parenleft-o b-s
we h triig c quoteright-o h n-s e r 6 xe .
i m m e d i
T h e o r-E e v e-m r 1 y zero-C^{1;1} l five-o i nn
t kr hi a v s-i aa n-l
D e p e n d i n g o n t h e l i n k , w
r d e r i n w t h e l i n k , w
e c a n h o p e t o g-A e B
q .notdef a d r i s c a n t s , C .notdef o c-r o-a .n H-l n
.notdef e-a t-r_r i-y_e m 1
e x a m p l e o f t h e t A g B-h q A tu B
Ha od r-p fi s-l
t h i s b o u n d h a

N o t Le e t m h ema x a - t t 8 e . n 1 d s i m m
a a d b - na - i d r - a t - .notdef .notdef - e n l c o m p o n
e n t s o f a u n j a - iNUL b j - NAK - oneperiod - t
g e o m T - e o t p r , yl V o - o - ampersand g l y - u

Theorem 10 . 6 L $L-e$ b t .notdef a li n k .notdef f .notdef
n i t t h i c - Q
I Q - f h a s AtAy A - A p B - A .notdef B - A BA B r - A AB C t Ah n
t h .notdef l .notdef - A
i s a 7EM - t 3C - equaltwo - eline - p3a - comma8s - EM 3equal - C1
C line - p3,2EM C 2 o 2r - EM C 2 , r e s
P r S - o o - u p a₁^{a-p}₂ a o - three b is s e a n e s s e
n A i A a , A la B - q n
r W D - a₂NULa₁ j ; s W a - D₃NULa₂ j :
ef is e c .notdef n t L i e s m w - s m a - e e r - h_{semicolon-eight}s - tNAK₁a - one - v l n - comma
C o r o tl CR - o a one - la₃ a n r - d Cy o 4 r . o
t - four_lCR - o a one - la₂ a n d - rCR a two - ya₃ Th period - u s 3 h e len
t o - A
i s a f tr /C - l g . r a - slash C f - s s t - slash C g . s / . s b e f r e ,
w e c .notdef n m
s e p a r La e - t e - m . m H - y a , e 9 n - u.s - c1e - i A
i - t g h - s e - a 7l - t - EM 3equal - Ce - twop - line3period - g - a
No w s u a₁^{a-p}₂ b p₃i - a o s s ae n t e - h a - s s - t e n
A i A a , B la q - A n
r W D - a₁NULa₂ j ; s W a - D₂NULb j ; t W D - bNULj - a₃ j :
t e q u .notdef d r i s e r ; s ; t nNAK₁a i n - s e - d s w s .notdef e C_{m-n} t o a i .notdef
t CR - o a₁a₂ C o r o tl o - CR a two - la₃ a nd Ly e 4 m . tm
o - CR - four a one - aa₃ W - four . 5 ha t el en gt
A i s a
g . r / C NUL f s / C f t / period - SOH C NUL f r / C s C f t / SOH - period
D NUL f r / C g . r / SOH C NUL f s / C s SOH C 2 f t / .
.notdef .notdef i n , m i i z n .notdef i e L h e
m - v , r - m w - i_a.notdef b - nine fi. e n 1 s
o A - f i s a 8t - EM 3equal - C1 C line - a - p3.
F i n a l a₁b y two - ci a u - a n p .notdef p - .notdef .notdef .notdef - o n
s t i - e a .notdef q A a d - B r B r - i .notdef A Ay B - a p n
B .notdef c a .notdef s .notdef t h .notdef q .notdef a d r j a₁NULb j c
one - NAK j - a b NULc j t one - NAK a s
j c NULa₂ j one - NAK .notdef s t a s i - L n e m - t , mw a e - p 4 r
fi_{alone-n₂}.notdef - a - five NAK_f EMC - t1 a a
t h CRa₂^{a-a}₁tNAKEM C 1 , s h o w i n g A i t s h aa 2t - t - EM C
two - t a h - e sae d - s₁ s - line - line
U n f o r t u n a t e l y , w e d o n
o t k
o n e o f t h e s e t y p e s o f q u a
A c k n o
W e ex t e n d o u r t h a n k s t
o S K u s n e r a n d N a n c y W r
i n k
p a r t i a l l y s u p p o r t e d
b y
D i a o) a n d D M S - 0 0 - 7 1
5 2 0
B o

G e o m T − e_o t p r_{o-commma} yl V ampersand − o − o g l y u

[1] R Budney J C o K n Pa nS tc D a S n i N - n n e e h w - l a l p
e r s p e c A t M a t h . 1 9 M 1 (R 2 2 0
[J] C a n J t F a - R r - u K e u l J s - l n - M a e - S ru N l l - C i W v
r - C a irnni t - k il c - e a 1
l i n k p - a r r o X b i l v e : m m a
[J] C a n G aK ru ep R - l e r - B a b K e J - u r Mg nSe u r - T l h l e i sv e - a c n o n
c u , r A v m e e . J. M a t h M . R 1 2 2
[J] C a n R t B - a r K e u - J l M - l n a Se u r - O l n l it v - h e - a n m i n i m u
l i , n I k n s v e n t . M a t M h R . 1 1
[E] D e A n l n t e e r n a t i n g P q u h a D d t r h i e s s e i c s ,
U r b a n a - C a h r a X m i p v a c o l o n - i m g a
[E] D e J n M n S e u T l h l e i d - v i - a s n t o r t a i r o X n i o v f : a m k - a
n d i s o

(2

[Y] D T - i a h e - o l o w e r b o u n d J - s . o K f
n oh te T l h 1 2 (2 0 M 0 3 R one - parenright

[A] D u m A t E r b e b secr u - A - G Br R ü u - K n m - G - e
eaRin n - o - O n t - n et h e

d i l a t i o n o f c l o s a e r d X c i u v r , : v m e a s
[1 A - zero] E b b e r A - G Br R udieresis - a K - u n e - m - G e e - a ionn n - m e t r i c d il
a n e w l , o fwr e - o r m b : o u - P r - n o d c e ed i n

g s o t i o n a l G e o m e t
[1 O - one] G o J - n z Ha lM ea G - z d ld o o b c a k l s c u r v a t u r e
k n , o P t r s o c N a t l . A c a d M . R S 1 c

[1 L - two H K a I unf v f a m rain a n t s o f - T
r g a - r n a s p h A i - m
(1 9 8 9) M 6 R 9 9

[1 G - three] K u p Q e u r a b d e r r i g s e c a J n . t K s n o
f - o t k T n h o e t o

4 1 - M 5 R 0 1 2
[1 R - four B - bracketright K J - u M n S e u r - O l n l di v
s - a tn o r t i o f n r a o n m d quotedblleft - t

g e o m e t r y i n p o l y m e r s c i e n c
S p r i n g e r , N M - e w R 1 Y

[1 H - five R M o - D r M t Q o n - M - C o - l o n s d e d c
u r v e T s o w p o t lh

2 3 5 M - endash 2 R 46
[1 E - six] P a n E n w n e - i t e z l e m e n t a r g
e o m e t r

M a t h . A n n . 1 M 0 R 8 1 (

[1 P - seven] P i - acute - n s e Ir kn^{a - i} s e ar c hf or f - o m - i d " I a d l e k a n l o k t s - n
W o r l d S c i . P u b l is M - h i R n l g

G e o m e - T_{ot} p r comma - o y l V ampersand - o o l - g y - u m

[1 8] E J Rawdon C a n c o m p u t e rEs x dpi sr c o mv ee
 2 8 7 M – endash 3 R 2 2

[1 J 9 M – bracketright S u A lp l i – p rv oa ni m a t i n
 g r for poe m l : e “ n
 k n o t t i n g l i n k i n – H11938³ g L
 comma – a.notdefa – V.notdef n a d , f comma – o two – l0 d o i
 M a t h . 3 0 4 , A m e r . M a t M – h . R S 1 o
 D e p a r t m e n t o f M
 C a m b r id g e , M D e p a r t m e n t o
 f M a t h
 C h a r l o t t e , N
 I n s t i t u t f ü r M a t h e m a t i c a
 D – 1 0 6 2 3
 d e n n e @ m a , y h d . i h a a or ,
 j u a mn r scd at – c . i .
 P r o p o s e a n
 S e c n d e d : D a i , W alt e r
 G e o m T ot p ro , yl V ampersand – o o l – g y u m